

论奥数教育的症结

2015-12-14

玄野

作为应试教育的极端，奥数已经侵淫中国二十余年，同时在欧美发达国家的基础教育中也影响巨大。人们对奥数教育微辞颇多，甚至于深恶痛绝，称之为杂耍数学教育，毁灭孩子的正常理性思维。然而奥数教育却在一片质疑声和斥责声中蓬勃发展，如火如荼。当然这种现象也不是数学教育中独有，各类应试教育都有相似格局，只是这奥数发展得比较极致，其对孩子的理性思维造成的淆乱比较严重，为其他应试教育无法相比。数学是一切科学的基础，不适当的教学路径对学生造成的影响深远而严重。但是公允地说，奥数教育就只是坑害学生吗？私以为并非如此，至少帮助孩子们建立了合适的学习习惯，其解题思路虽然光怪陆离，但孩子依然会从其中领悟到数学与科学需要的是一些严密复杂的流程，而不是灵光一现就解决了问题。问题在于，对于悟性一般的孩子，专注于解题思路，而不是着重在科学概念的理解上，会造成其对科学概念与解析流程的理解紊乱，无法构建正确的理性思维架构。而实际中能达到从老师的怪异解题方法中悟出正确原理的孩子应该是很稀少的。教孩子们科学知识，尤其是数学知识，目标必须在科学的基本概念和现实物理意义上，而不可以局限在解决某种题目的方法上。洋洋自得于解题方法，与孩子们沉迷于电子游戏无异。这些都与孩子们理解自然事理和实际应用没有太大关系，反而会成为大多数孩子心中的障碍。奥数的症结在于其专注在解决各类数学考题的高效快速的方法上，而不是将解题作为一种手段帮助孩子们正确理解数学与科学的基本原理概念和正确的分析流程，有坐井观天之虞。下面我们以一个实际的奥数题目为例来解析一下奥数教育的症结所在。

有这样一个奥数题目：

如果 $274!$ 可以被 12^x 整除 (12^x 代表 12 的 x 次幂，比如 $12^5 = 12 * 12 * 12 * 12 * 12$)，那么 x 的最大可能整数值是多少？

显然，这个题目是考查素数的概念，就是如下的原理：

一，任何一个整数都可以分解成多个素数的乘积。

二，任何素数只能被一和其自身整除。

三，任意多素数的乘积，如果因子中不含有某个素数，这个乘积也必然不可以被这个素数整除。其肯定意义上的表述为：如果这个乘积可以被某素数整除，那么其因子中必然含有这个素数。条件与结论互为充要条件。

直观地说，题目的要求就是在被除数中能分解出多少个 12 。

解决这道题，首先要看除数，因为其根 12 是一个合数，而我们不能直接在被除数中简单地寻找 12 的倍数来解题，因为两个偶数和另外一个三的倍数就可以构

成一个因子 12，例如 14，22，和 15 的乘积就可以凑出一个 12。

那么第一步就是分解 12:

$$12 = 3 * (2^2)$$

第二步，寻找被除数中有多少因子 3 和因子 2。

一般来说，寻找有合数因子的数比较麻烦，而寻找有素数因子的数就很简单。274 的阶乘中有多少个因子 3 呢，首先就是 1 到 274 这些数中有多少个三的倍数，每三个数一个吗，用 274 一除就行了，取整就是其中有多少个三的倍数。

更细致的问题是，某些数中不止有一个因子 3，比如 9 有两个因子 3，所有 9 的倍数也有两个因子 3。27 有三个因子 3，而 27 的倍数也会有三个因子 3;依此类推。那么这第二步就应该分解成多个步骤来解决:

第一，274 除以 3，弃尾取整得到有多少个数至少有一个因子 3，得 A1。

第二，274 除以 9，弃尾取整得到有多少个数至少有两个因子 3，得 A2。

第三，274 除以 27，弃尾取整得到有多少个数至少有三个因子 3，得 A3。

依此类推，直到最后的商 An 小于三。

最后，因子 3 数量如何算呢？9 中有两个因子 3，是否要 A1+2*A2？显然不行，因为 9 作为三的倍数已经在 A1 中被记过一次因子 3 了，所以 A2 所贡献的因子 3 只能再算一个。而 27 呢，因为在 A1 和 A2 中被记过两次，所以也只能再算一个。

那么，最后因子 3 的数量将会是

$$A=A1+A2+A3+...+An=135$$

因子 2 的数量也依此计算出来:

$$B=B1+B2+B3+...+Bm=271$$

第三步，计算指数 x 的最大值。

除数 12^x 可以化作两个因子的幂，即

$$(3*2^2)^x = (3^x) * ((2^2)^x)$$

这里面有一个极其重要的概念，就是指数运算的分配律。这从加法的分配律衍生

出来,基本可以算作人思维的基础直觉,看似简单没意思,实则是最重要的概念。这就像建筑中的基本原料水泥一样。

$$(a*b)^n = (a^n) * (b^n)$$

通过以上运算可以知道

$$274! = (3^{135}) * (2^{271}) * C$$

其中 C 是不含有因子 2 和 3 的某个整数。x 所必须满足的条件是:

$$(3^x) * ((2^2)^x) \leq (3^{135}) * (2^{271})$$

最后的条件就可以简化成:

$$\text{一, } x \leq 135$$

$$\text{二, } 2x \leq 271$$

因为两个条件是“与”的关系,也就是说,两个条件必须同时满足,答案才是正确的。这里面又是一个更加重要更加基础的概念,就是逻辑中的运算因子“与”或者说形式逻辑中的两个必要条件构成一个充分条件。这里不必要追溯到数理逻辑的同一律,排中律和矛盾律,但逻辑常识应该借此机会讲授。由此可以得出答案,x 的最大值为 135。

题外之话,如果改变阶乘的基数 274 为其他数值,求其中的因子 2 和因子 3 的数量,可以发现因子 2 的数量总大约是因子 3 数量的两倍。有兴趣的人可以逻辑上推演一下,最后的结论就是比较这两个数的关系

$$1/2 + 1/4 + \dots + 2^{(-m)}$$

$$1/3 + 1/9 + \dots + 3^{(-n)}$$

如这里的 274。当 m, n 趋近于无穷大时, $M=1$, $N=1/2$ 。一般来说, n 必然要小于 m, 因为这是递减的等比数列, 头几个数值基本决定了 M 和 N 的大致值, 所以 M 总是 N 的两倍多一点。

我们再来看奥数班的讲解方式。

当然, 解题思路不会有什么变化, 只是其中细节可以找点巧处。如果有哪位奥数老师会强调讲解以上所提到的几大基础概念与原理, 那就是学生们的福气了。但我极其怀疑在当代奥数教育中一百个老师里会不会找到一个老师这么讲, 因为这种讲解方式与奥数教育目标是完全相反的。

儿子从奥数课上回来，这道题让他做得简洁得难以接受。整个解题过程就剩下这样几步（以下等式为取整运算。）：

$$274/3=91$$

$$91/3=30$$

$$30/3=10$$

$$10/3=3$$

$$3/3=1$$

$$91+30+10+3+1=135$$

$$274/2=137$$

$$137/2=68$$

$$68/2=34$$

$$34/2=17$$

$$17/2=8$$

$$8/2=4$$

$$4/2=2$$

$$2/2=1$$

$$137+68+34+17+8+4+2+1=271$$

$135 < 271$ ，所以最终答案是 x 的最大值是 135

我相信老师在讲解此类题目时已经完整地讲解了具体思路，但是学生所记住的只有针对于此类题目的这种解题过程与公式应用，每步是什么意思完全不理解。最明显的，不用 $274/9$ 计算 A_2 ，而是用 $91/3$ 计算 A_2 ，导致其数学过程更难以理解，与真正的物理意义隔阂更大。当然这样算提高了速度，却为学生的正确理解增加了一堵墙。

这就像教孩子如何建房子。学习过程中总要找一些简单的建筑来教授，比如鸡舍鸭房之类，但目标却是高楼大厦。所以我们应该提供给孩子们砖块，水泥和钢筋等基础建筑材料，再教给孩子们正确的建筑流程，其中过程可能十分复杂繁琐。

某些人哗众取宠，争夺教育资源，显示自己教学方法何等高效，于是就将普通的建筑材料预制成几块合成板料，可以让孩子快速学会搭建鸡舍，面对考试时能比其他人快速准确地搭建起来。当孩子们长大了，需要建高楼大厦了，他们需要的是砖头，水泥和钢筋，但这些材料都被老师做成建鸡舍的预制板料存储在孩子的仓库里了，他们如何建得了高楼大厦呢？这些预制板料与垃圾又有何异？

其中有某些原理是必须讲解明白的，我相信老师都提到了，但绝没有强调，强调的只是这取巧提高解题速度的鸡舍预制板。比如其中的逻辑“与”问题，必须花大力气讲解透才行，这是现实生活，科学原理以及解题的绝对基础，最有用的东西。老师怎么讲的不知道，但这学生解题时一点儿这方面的考虑都没有，直接用 $135 < 271$ 就得出结论了。这里有一个巧合就是题目要求的是 12，也就是因子 2 的数量恰为因子 3 的两倍，而被除数中恰好因子 2 的数量大于因子 3 的数量的两倍。解题时根本用不着走逻辑“与”这个过程。于是我问他，如果将题中的 12 换成 24，那答案是多少。回答是 135。当然，正确回答应该是 $271/3=90 < 135$ ，答案是 90。原因是 24 中有三个因子 2。显然，其解题思路中就没有正确细致的逻辑“与”这一步。教学过程中，这关键有用的一步不过是走个过场而已。

还需要强调一下，如今这奥数教育在数论领域的份量极大，与数论本身在科学应用中的比重有天壤之别。因为这个领域可以很容易地编出无穷无尽的绕人题目来，而且学生的父母一看就晕菜，也再不敢有什么质疑。而数论知识在实际生活中的应用十分有限，除非大家一起玩通信编码解码，那就是全民吃错药了。

诸位兄弟姐妹，为了防止具有数理天赋的孩子们长大后只会搭鸡舍而不会盖房子，请关切一下孩子们的奥数教育内容，及时补充强调数理学习中最本质最有价值的那些基础原理。不能让他们只认识搭鸡舍的预制板，纵然不能教他们从和泥脱坯开始，也要让他们知道砖块水泥的用法，让他们学习一个正确完整的建筑流程。

奥数教育的蓬勃发展影射出一种巨大的社会力量，就是人们对基础教育中理性思辩的迫切需求，而且这种需求被各国的基础教育忽视了。这种需求是否合理，与人的理性成长过程是相契合的还是相悖逆的，难以简单地下定论，需学术界给出充足证据才可以。但两个方面是比较确信的，奥数教育对培养孩子的学习习惯有比较好的效果，理应肯定；同时，以解题为目标的教学，尤其在理性思辩的科目上，完全是喧宾夺主的教育，就像人的饭桌上酱油醋成了主食，米饭馒头变成配菜，其对人健康的危害就可想而知了。所以，不能说奥数教育彻底负面，但为满足社会的巨大需求，启动一些正确的理性思辩教育是必须的，以此取代局限于应试的奥数教育。

玄野 发表评论于 2015-12-15 12:34:20

回复 '泥中隐士' 的评论：没错，就是这个方案。但原题中的除数为合数，所以要分解成 2 和 3。

泥中隐士 发表评论于 2015-12-15 11:44:40

Let p be a prime number. Set $n! = p^k Q$ where Q cannot be divided by p . The formula for k is

$$k = [n/p] + [n/p^2] + \dots$$

Applying this formula for $p=2,3$, one can find x in the original problem.

bjszh 发表评论于 2015-12-15 10:16:21

讲得太好了，大赞！小孩子第一次见一类新题时不知所措，天才数学家自己能找出解决方法，有数学天赋的重视其中如您所解释的道理，而大多数孩子只是学了方法，应付竞赛而已。

大号蚂蚁 发表评论于 2015-12-14 08:35:22

课外活动的一种选择是好事，当成正课，甚至升学考试的标准就扯淡了。